Concours Universitaire des Écoles Centrale

2026

programme des épreuves de la

dominante mathématiques

Table des matières

1 Mathématiques

1.1 Rudiments

Implication, contraposition, équivalence. Modes de raisonnement : par récurrence (simple, double, forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse. Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble. Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Ensembles des parties d'un ensemble.
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble, restriction, prolongement. Image directe, image réciproque. Composition. Injection, surjection. Bijection, réciproque.

1.2 Calculs algébriques

1. Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes. Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n, n \in \mathbb{N}^*$. Produit de deux sommes finies.
2. Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule de symétrie. Formule et triangle de Pascal.
3. Systèmes linéaires. Opérations élémentaires : inversion de ligne, produit par une constante non nulle, ajout d'une ligne. Algorithme du pivot.

1.3 Nombres complexes et trigonométrie

1. Nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un vecteur. Interprétation géométrique de la conjugaison.
2. Module. Relation $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Interprétation géométrique du module, cercles et disques.
3. Cercle trigonométrique. Définition de l'exponentielle complexe, exponentielle d'une somme. Formules de trigonométries : $\cos(a \pm b), \cos(2a), \sin(2a), \cos a \cos b, \sin a \cos b, \sin a \sin b, \tan(a \pm b)$. Factorisation d'expressions du type $\cos p + \cos q$. Formules d'Euler, formule de Moivre. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

4. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Factorisation par l'arc moitié.
5. Interprétation géométrique du module et de l'argument.
6. Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
7. Racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul. Représentation géométrique.
8. Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

1.4 Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

1.4.1 Divisibilité et division euclidienne, PGCD

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.
2. PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide. Relation de Bézout. PPCM

1.4.2 Entiers premiers entre eux

Définition. Théorème de Bézout, lemme de Gauss.

1.4.3 Nombres premiers

1. Définition.
2. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers. Pour p-premier, valuation p-adique. Expression du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.

1.4.4 Congruences

Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit.
Petit théorème de Fermat.

1.5 Structures algébriques usuelles

1.5.1 Théorie des groupes

1. Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.
2. Groupe. Groupe des permutations d'un ensemble.
3. Sous-groupe : Définition et caractérisation. Intersection de sous-groupe. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Groupe monogène. Groupe cyclique.
4. Ordre d'un élément d'un groupe. L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe. L'ordre d'un élément x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.

1.5.2 Anneaux, corps

1. Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
2. Anneau, corps. Groupe des inversibles d'un anneau.
3. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps. Indicatrice d'Euler φ : calcul de $\varphi(n), n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers, relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ et m et n sont premiers entre eux, expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
4. $\mathbb{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.

1.6 Polynômes et fractions rationnelles

1.6.1 Anneau des polynômes à une inéterminée

1. Anneau $\mathbb{K}[X]$.
2. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Composition.

1.6.2 Divisibilité et division euclidienne

1. Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.

2. Théorème de la division euclidienne.
3. PGCD. Algorithme d'Euclide.
4. Relation de Bézout. Théorème de Bézout. Couple de polynômes premiers entre eux. Lemme de Gauss

1.6.3 Racines

1. Racine d'un polynôme. Caractérisation en terme de divisibilité. Fonction polynômiale associée à un polynôme.
2. Multiplicité d'une racine. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
3. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.
4. Polynôme d'interpolation de Lagrange. Définition et expression.

1.6.4 Dérivation

1. Dérivée formelle. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit, formule de Leibniz.
2. Formule de Taylor polynomiale.
3. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

1.6.5 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

1. Théorème de d'Alembert Gauss.
2. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

1.6.6 Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

1. Corps $\mathbb{K}(X)$.
2. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

3. Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
4. Calcul et décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

1.7 Espace vectoriel

1.7.1 Espace vectoriel

1. Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
2. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.
3. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.
4. Sous-espace vectoriel : Définition, caractérisation. Intersection. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.
5. Familles et parties libres, liées. Familles et parties génératrices. Base, coordonnées. Base canonique.
6. Somme de deux sous-espaces. Somme directe. Caractérisation par l'intersection.
7. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

1.7.2 Espace de dimension finie

1. Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.
2. Existence de bases en dimension finie.
3. Théorème de la base extraite/de la base incomplète.
4. Dimension d'un espace de dimension finie. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.
5. Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.
6. Rang d'une famille finie de vecteurs.
7. Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
8. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Dimension du supplémentaire.
9. Base adaptée à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.
10. Dimension d'une somme de sous-espaces. Formule de Grassmann. Caractérisation ds couples de sous-espaces supplémentaires.

1.8 Espaces préhilbertiens réels

1.8.1 Orthogonalité

1. Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien.
2. Norme associé à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formules de polarisation.
3. Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Famille orthogonale, orthonormale. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.
4. Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.
5. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie. Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.
6. Matrice orthogonale. Définition : $A^T A = I_n$. Caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes. Groupe orthogonal. Déterminant d'une matrice orthogonal.

1.8.2 Normes et espaces vectoriels normés

1. Norme sur $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.
2. Distance associée à une norme. Inégalité triangulaire.
3. Parties, suites, fonctions bornées.
4. Norme associé à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.
5. Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère bornée d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Suites extraites, valeurs d'adhérence.
6. Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
7. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.
8. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.
9. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
10. Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.
11. Équivalence des normes en dimension finie.
12. Une suite bornée d'un espace normé en dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
13. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermée.

14. Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produits d'espaces vectoriels normés de dimension finies. Exemples : Déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

1.9 Matrices

1.9.1 Calcul matriciel, matrices et applications linéaires

1. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Base canonique et dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Produit matriciel. Bilinéarité, associativité. Formule du binôme. Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieurs, inférieures. Transposition et opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.
3. Matrice d'une application linéaire dans des bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul. Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.
4. Matrice par blocs.
5. Changements de bases. Matrice de passe d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de bae sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.
6. Si $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est de rang r, il existe une base e de E et une base f de F telles que $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$, où J_r est une matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
7. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.
8. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.
9. Matrices semblables. Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, tr(AB) = tr(BA), invariance par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation tr(uv)=tr(vu).

1.9.2 Systèmes linéaires

1. Interprétation des opérations élémentaires en termes de produit matriciel. Les opérations élémentaires conservent le rang.
2. Écriture matricielle d'un système linéaire. Rang. Système de Cramer.

1.10 Déterminants

1. Forme n-linéaire alternée. Anti-symétrie, effet d'une permutation.
2. Déterminant d'un endomorphisme, d'une composée. Caractérisation des automorphismes.
3. Déterminant d'une matrice carrée, d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles.
4. Calcul des déterminants. Effet des opérations élémentaires. Cofacteur, développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs. Comatrice, relation $Acom(A)^T = com(A)^T A = det(A)I_n$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

1.10.1 Applications linéaires

1. Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphisme. $\mathcal{L}(E;F)$ est un espace vectoriel.
2. Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire.
3. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité.
4. Image d'une famille génératrice par une application linéaire.
5. Image d'une base par un isomorphisme.
6. Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.
7. Endomorphismes. Identité, homothétie. Projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = Id$. Automorphismes. Groupe linéaire.
8. Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base de l'espace de départ. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité d'une application linéaire.
9. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.
10. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement si elle est inversible à droite.
11. Dimension de $\mathcal{L}(E;F)$, si E et F sont de dimension finie. Théorème du rang.
12. Forme linéaire. Hyperplan (un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle).
13. $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, ||u(x)|| \leq C||x||$. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.
14. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composé, involutivité du passage à l'adjoint. Matrice de l'adjoint en base orthonormée.
15. Endomorphisme autoadjoint. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée. Théorème spectrale. Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.

1.10.2 Application continues dans un espace vectoriel normé

1. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.
2. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
3. Application lipschitziennes. Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x; A)$ où A est une partie non vide de E.
4. Image d'une partie compacte. Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.

1.11 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1.11.1 Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

1. Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
2. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Équation $u(x) = \lambda x$.
3. Spectre d'un endomorphisme en dimension finie. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.
4. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.
5. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. Équation $MX = \lambda X$.
6. Deux matrices semblables ont même spectre.

1.11.2 Polynôme caractéristique

1. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Par convention, le polynôme caractéristique est unitaire.
2. Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
3. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, d'un endomorphisme induit.
4. Multiplicité d'une valeur propre.
5. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
6. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

1.11.3 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
2. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E. Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
3. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme.
4. Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité. Cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

1.11.4 Endomorphisme et matrices carrées trigonalisables

1. Endomorphisme trigonalisable.
2. Matrice trigonalisable.
3. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Expression à l'aide des valeurs propres, de la trace, et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

1.11.5 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

1. Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie. Matrice nilpotente.
2. Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
3. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

1.11.6 Polynôme annulateur et minimal d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

1. Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Le polynôme minimal est unitaire.
2. Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Les racines du polynôme minimal de u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.
3. Lemme de décomposition des noyaux.

4. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racine simple, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
5. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.
6. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.
7. Théorème de Cayley-Hamilton.

1.12 Techniques de calcul en analyse

1.12.1 Inégalités de $\mathbb{R}$

1. Valeur absolue. Inégalité triangulaire. Intervalles de $\mathbb{R}$.
2. Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.
3. Partie entière.
4. Borne supérieure, resp. inférieure, d'une partie non vide majorée, resp. minorée de $\mathbb{R}$.

1.12.2 Généralités sur les fonctions

1. Ensemble de définition. Parité, imparité, périodicité.
2. Composition.
3. Monotonie (large et stricte)
4. Fonctions majorées, minorées, bornées. Traduction géométrique.
5. Dérivation. Équation de la tangente en un point. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une réciproque. Dérivées d'ordre supérieur. Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.
6. Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.
7. Fonctions usuelles : exponentielle, logarithme népérien, puissances. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissance et exponentielle. Fonctions sinus, cosinus, tangente. Fonctions circulaires réciproques. Fonctions hyperboliques.

1.12.3 Généralités sur les suites réelles

1. Suite majorée, minorée, bornée, monotone, strictement monotone.
2. Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.

3. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à-partir d'un certain rang.
5. Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
6. Théorème de la limite monotone.
7. Théorème de suites adjacentes.
8. Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
9. Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.
10. Suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
11. Étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervalle stable. Lien entre la monotonie de f et celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou celles de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Théorème du point fixe.

1.12.4 Primitives et équations différentielles linéaires

1. Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.
2. Primitives des fonctions puissances, trigonométriques, hyperboliques, exponentielle, logarithme, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
3. Dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ où f est continue. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
4. Techniques de calcul des intégrales : Intégrations par parties. Changement de variable.
5. Équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' + ay = b$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. Forme des solution. Principe de superposition. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
6. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f$, où a et b sont des scalaires et f une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Résolution de l'équation homogène. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Principe de superposition. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}, (A;\lambda) \in \mathbb{C}^2, x \mapsto B\cos(\omega x), x \mapsto B\sin(\omega x), (B,\omega) \in \mathbb{R}^2$.

1.12.5 Limites, continuité, dérivabilité

1. Limite finie ou infinie d'une fonction en $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Unicité de la limite. Limite à droite, limite à gauche.
2. Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.
3. Caractérisation séquentielle de la limite.
4. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.
5. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration.
6. Théorème de la limite monotone.
7. Continuité, prolongement par continuité. Continuité à gauche, à droite.
8. Caractérisation séquentielle de la continuité.
9. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Continuité sur un intervalle.
10. Théorème des valeurs intermédiaires. Cas d'une fonction strictement monotone. Application à l'algorithme de dichotomie.
11. Théorème des bornes atteintes.
12. Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.
13. La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.
14. Dérivabilité en un point, nombre dérivé. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. La dérivabilité entraîne la continuité.
15. Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.
16. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Inégalité des accroissement finis. Théorème de la limite de la dérivée.
17. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.
18. Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^k$.
19. Extension aux fonctions à valeurs complexes.

1.12.6 Analyse asymptotique

1. Relations de domination, de négligeable, d'équivalence. Liens entre les relations de comparaison.
2. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.
3. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.
4. Développement limité, unicité des coefficients, troncature. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. Primitivation d'un développement

limité. Formule de Taylor-Young. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto (1+x)^a$, arctan , $\tan$.

5. Formule de Stirling.

1.12.7 Intégration

1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.
2. Linéarité, positivité et croissante de l'intégrale. Si f est continue et intégrable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_I f = 0$ alors f est identiquement nulle. Relation de Chasles.
3. Intégration par parties sur un intervalle quelconques. Changement de variable. Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.
4. Sommes de Riemann. Interprétation géométrique.
5. Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$: si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}(g(x))$ alors l'intégrabilité de g sur $[a; +\infty[$ implique celle de f ; si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathcal{O}(g(x))$ alors l'intégrabilité de g sur $[a; +\infty[$ équivaut à celle de f.
6. Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.
7. Nature de l'intégrale de Riemann.
8. Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.
9. Théorème de convergence dominée.
10. Théorème d'inversion $\sum$ et $\int$ pour des fonctions continues par morceaux, intégrables sur I et à valeurs positives. Théorème d'inversion $\sum$ et $\int$ pour des fonctions continues par morceaux, intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
11. Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.

1.12.8 Séries numériques

1. Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.
2. Linéarité de la somme.
3. Le terme général d'une série convergente tend vers 0.
4. Lien suite-série, séries télescopiques. Séries géométriques : convergence et somme.
5. Séries absolument convergente. Cas particulier des séries à termes positifs.
6. Technique de comparaison série-intégrale.
7. Règle de d'Alembert.

8. Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.

1.12.9 Suites et séries de fonctions

1. Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme implique la convergence simple.
2. Transmission du caractère continue par convergence uniforme. Extension à la classe $\mathcal{C}^1$ puis aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sous l'hypothèse de convergence simple des suites des dérivées précédentes.
3. Théorème de la double limite.
4. Intégration d'une limite uniforme sur un segment.
5. Séries de fonctions. Convergence simple et uniforme. Adaptation des résultats précédents au cas des séries de fonctions. Convergence normale d'une séries de fonction. La convergence normale implique la convergence uniforme.

1.12.10 Séries entières

1. Lemme d'Abel. Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence.
2. Relations de comparaison et lien avec le rayon de convergence.
3. Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques.
4. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
5. Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 et contenu dans le disque ouvert de convergence.
6. Théorème d'Abel radial.
7. La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Le rayon de convergence d'une série entière et de sa série dérivée sont égaux.
8. Fonction développable en série entière. Développements usuels dans le domaine réel.

1.13 Dénombrement. Probabilités

1.13.1 Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble fini. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensemble finis. Cardinal de la réunion de deux ensemble finis. Cardinal de l'ensemble des

applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

2. Nombre de p-listes, arrangements, combinaisons.

1.13.2 Probabilités

1. Expérience aléatoire. Univers. Événement élémentaire, événement contraire, union et intersection d'événements. Système complet d'événements.
2. Définition d'une probabilité. Probabilité de la réunion de deux événements, d'un événement contraire. Croissance. Événements indépendants.
3. Tribu, espace probabilisable. Événements. Probabilités sur un espace probabilisable. Espace probabilisé discrets.
4. Continuité croissante, continuité décroissante.
5. Sous-additivité de la probabilité pour une réunion dénombrable d'événements.
6. Probabilités conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Indépendance.
7. Variables aléatoires discrètes. Loi d'une variable aléatoire. Variable aléatoire $f(X)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement A. Couple de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales. Famille finie de variables aléatoires indépendantes. Lemme des coalitions.
8. Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe. Formule de transfert. Si X et Y ont une espérance et qu'elles sont indépendantes $E(XY) = E(X)E(Y)$.
9. Variance, inégalité de Cauchy-Schwarz. Relation : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$.
10. Lois usuelles : géométrique, Poisson, uniforme, Bernoulli, binomiale. Espérance et variance.
11. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
12. Fonction génératrice. Détermination de la loi de X par sa fonction génératrice.

2 Physique

N.B. Afin d'éviter les ambiguïtés sur la terminologie ou le périmètre des notions du présent programme, le choix a été fait de se référer aux sommaires d'ouvrages de référence. Ces ouvrages ont été choisis pour leur exhaustivité et leur disponibilité en bibliothèques et ne témoignent en aucun cas d'un parti pris éditorial.

2.1 Mécanique

Extraits de J.-P. Pérez, O. Pujol, Mécanique, Dunod, (7e édition).

1. Calcul vectoriel. Torseurs. Analyse dimensionnelle
2. Cinématique du point mobile. Vitesse de rotation d'un repère
3. Changement de référentiel
4. Dynamique du corpuscule
5. Énergétique du corpuscule
8. Particule chargée dans un champ électromagnétique stationnaire
10. Oscillateurs harmoniques. Oscillateurs amortis
11. Oscillations forcées. Résonance
12. Corps ponctuel soumis à une force centrale conservative
14. Collision de deux particules

2.2 Électromagnétisme et Optique

Extraits de J.-Ph. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, Électromagnétisme, Dunod (4e édition).

16. Équations de Maxwell. Approximation des régimes quasi stationnaires
19. Ondes électromagnétiques dans le vide

Extraits de J.-Ph. Pérez, É. Anterrieu, Optique, Dunod (7e édition).

18. Vibrations monochromatiques. Vibrations quasi monochromatiques
19. Ondes progressives et ondes stationnaires
21. Diffraction : principe d'Huygens-Fresnel. Approximation de Fraunhofer
22. Interférence de deux ondes. Cohérence mutuelle

2.3 Physique Quantique

Extraits de C. Cohen-Tannoudji, F. Laloë, B. Diu, Mécanique Quantique - Tome 1, Edp Sciences (Édition de 2018).

Chapitre I. Ondes et particules. Introduction aux idées fondamentales de la mécanique quantique
Chapitre II. Les outils mathématiques de la mécanique quantique
Chapitre III. Les postulats de la mécanique quantique
Chapitre V. L'oscillateur harmonique à une dimension

3 Anglais

The purpose of the English exam is to assess the level of the candidate within 30 minutes and to score their performance. One examiner conducts the speaking test, and candidates are examined singly.

In the **first part** of the test, you will be given 3-5 minutes to introduce yourself and converse with the examiner on personal matters such home, family, hobbies. . .

The **second part** of the test involves a 6-8 minutes' conversation on familiar topics such as travel, accommodation, friends, food, education, weather. . .).

Samples questions :
- Let's talk about your studies ?
- When did you get your high school certificate ?
- What kind of studies did you pursue in university ?
- Did you enjoy that ?
- What is your favorite subject ? Why ?
- What do you aim to study in the future ? Why ?
- What do you consider the ideal educational system ?

In **the third** part of the speaking test, the candidate is given *5 minutes* to read the text and take notes. The examiner should ask the candidate to summarize the text, then give his/her opinion about the controversial topic : (Do you think that algorithms are more efficient than a team of human editors to deter inappropriate content ?) *10 minutes is the time allotted for discussion.*

Sample text :

> ...There is no doubt that it takes a huge effort to moderate all the content that gets uploaded to Facebook. But over the past few months, the social giant has shown signs of strain. Back in August, shortly after the company fired a team of human editors overseeing the Trending section of the site in favor of an algorithm, a false news story found its way to the top of the queue.
>
> In February, CEO Mark Zuckerberg published a wide-ranging open letter on his Facebook page about the direction he hopes to take the company, touching on the need for more vigilance in the face of "fake news" and also a stronger infrastructure to handle the raft of content that is posted by users on a daily basis.

"There are billions of posts, comments and messages across our services each day, and since it's impossible to review all of them, we review content once it is reported to us," Zuckerberg wrote. "There have been terribly tragic events – like suicides, some live streamed – that perhaps could have been prevented if someone had realized what was happening and reported them sooner. There are cases of bullying and harassment every day, that our team must be alerted to before we can help out. These stories show we must find a way to do more."...

Retrieved from www.sfgate.com by Nina Zipkin, May 22, 2017

4 Entretien

Les candidats seront amenés à argumenter scientifiquement sur un sujet de culture générale de l'ingénieur basé sur un court texte, qui pourra également être le prétexte pour aborder la formation dans les Écoles d'ingénieurs généralistes ainsi que la compréhension du rôle de l'ingénieur.

Exemple de texte :

> La décarbonation de notre système énergétique est la pierre angulaire de notre politique climatique. Sa mise en œuvre rapide conditionne le respect de nos objectifs climatiques. Le contexte actuel nous impose encore plus d'agir sans tarder. La guerre en Ukraine nous montre combien les objectifs de souveraineté et les objectifs climatiques sont alignés. On voit se dessiner deux stratégies. La première consiste à acheter encore du temps pour réorganiser les approvisionnements en énergies fossiles. Elle est incontournable à très court terme. Mais il ne faudrait pas remplacer une dépendance par d'autres. La seule stratégie porteuse d'avenir est celle qui consiste à tout mettre en œuvre pour aller le plus vite possible vers des solutions décarbonées et une vraie souveraineté. Pour cela, il ne suffit pas de disposer d'objectifs globaux ou de scénarios de référence. L'enjeu crucial est celui du déploiement effectif et contrôlé, dans le temps et dans l'espace. Et, sur ce plan, il y a lieu d'être inquiet, car nous ne disposons absolument pas des méthodes, des instruments et des organisations permettant de piloter efficacement ce déploiement.

Brève de l'académie des technologies, *Quelle gouvernance pour la décarbonation du systèmes énergétique ?*, Y. Bamberger, P. Pelata et P. Veltz. 4 avril 2022.